Présentation à l'Université Populaire de Caen le 30 novembre 2023

SUITES de NOMBRES et SOMMES de SUITES
Nombres entiers, impairs, triangulaires, carrés et cubiques

Voyage immobile à bord de votre calculatrice … ou du désir d'être inutile.

PLAN :

1. **QUELQUES SUITES de NOMBRES ENTIERS**,
2. **RELATION entre NOMBRES IMPAIRS et CARRÉS**,
3. **RELATION entre NOMBRES TRIANGULAIRES et CARRÉS**,
4. **RELATION entre NOMBRES IMPAIRS et CUBES**,
5. **SOMME des NOMBRES ENTIERS de 1 à n**,
6. **SOMME des CARRÉS des NOMBRES ENTIERS de 1^2 à n^2** ,
7. **SOMME des CUBES des NOMBRES ENTIERS de 1^3 à n^3** ,
8. **BILAN de ces SOMMES d'ENTIERS, de CARRÉS et de CUBES.**

1. QUELQUES SUITES de NOMBRES ENTIERS :

1.1. La SUITE des ENTIERS POSITIFS ou NATURELS :

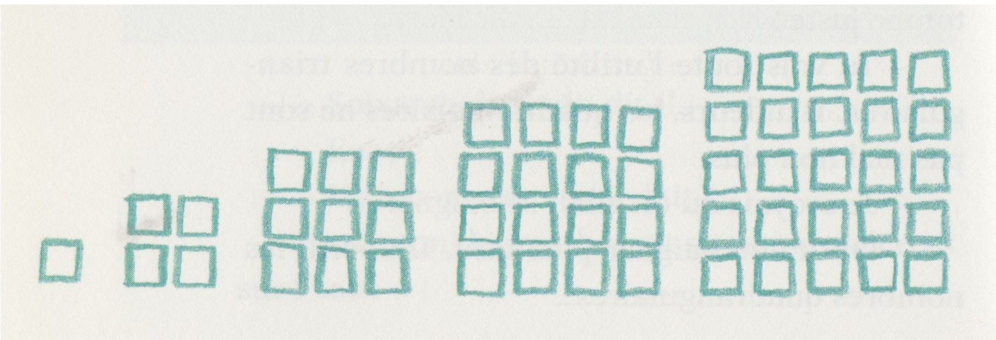
1, 2, 3, 4, … 9, 10, 11, 12, … 99, 100, … 1000, etc …

1.2. La SUITE des ENTIERS IMPAIRS :

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, … 19, 21, 23, ...

1.3. La SUITE des NOMBRES CARRÉS :

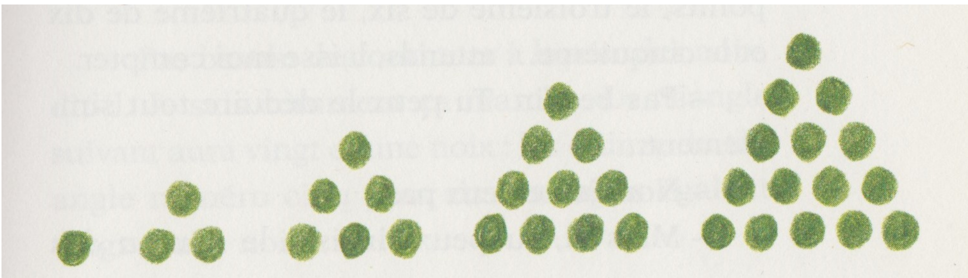
Ce sont les carrés des nombres entiers :



base 1 : de base 2 : de base 3 : de base 4 : de base 5 : …
1 **4** **9** **16** **25** **…**

Les premiers sont donc : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, …
Et la valeur d'un **nombre carré** de base **n** est évidement = **n** x **n** = $\mathbf{n^2}$.

1.4. La SUITE des NOMBRES TRIANGULAIRES :



base 1 :	de base 2 :	de base 3 :	de base 4 :	de base 5 :	…
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**…**

Si l'on dispose des cailloux en forme de triangle, on voit que les nombres triangulaires peuvent s'écrire comme la somme de nombres entiers positifs consécutifs :

La dénomination de ces nombres provient de la disposition des cailloux dans ces formes triangulaires.

Les premiers sont donc : 1, 3, 6, 10, 15 … et les suivants sont : 21, 28, 36, 45, 55, … Nous pouvons même préciser 10 de base 4, 15 de base 5, 21 de base 6, 28 de base 7, …

<u>Deux nombres triangulaires</u> particuliers que l'on retrouve <u>dans la bible</u> :

☯. **153** de base 17 *(153 est le **nombre de poissons** ramenés par saint Pierre selon le récit **de la « Pêche miraculeuse »** se trouvant dans l'Évangile selon Jean au chapitre 21, verset 11)*

☯. et **666** de base 36 *(666 est le **nombre de la Bête** ou **chiffre de la Bête** – Satan - contenu dans l'Apocalypse de Jean de Patmos au chapitre 13, verset 18).*

1.5. La SUITE des NOMBRES CUBIQUES :

Ce sont les cubes des nombres entiers :

base 1 :	de base 2 :	de base 3 :	de base 4 :	de base 5 :	…
1	**8**	**27**	**64**	**125**	**…**

2. <u>RELATION entre NOMBRES IMPAIRS et CARRÉS</u> :

La somme de n'importe quelle suite d'impairs à partir de 1 est un CARRÉ :

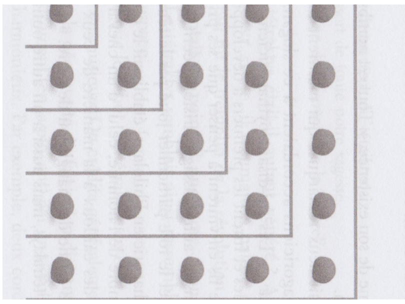
<u>Sous la forme d'un petit exercice</u> :

1. Choisir un nombre impair **N** entre 4 et 12,
2. Faire la somme de tous les nombres impairs de **1** à **N**,
3. Qu'obtient-on ?

<u>Exemple</u> : si **N** = 9, 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = **25**, $\mathbf{25 = 5^2}$ **.**

Si l'on dispose les petits cailloux en forme de carré, on voit que les nombres carrés peuvent s'écrire comme la somme de nombres impairs consécutifs.

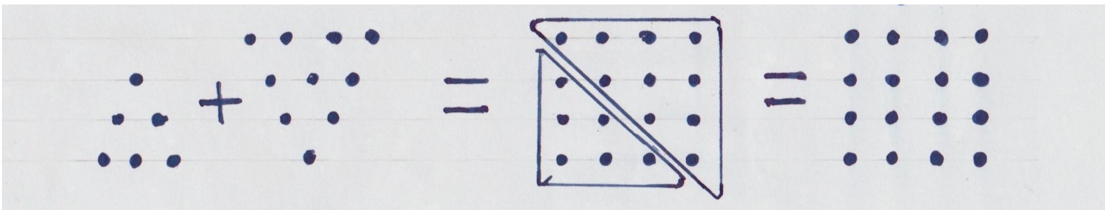
Ceci était déjà connu des Pythagoriciens qui établissaient des « démonstrations » graphiques comme celle ci-dessous :



3. RELATION entre NOMBRES TRIANGULAIRES et CARRÉS :

La somme de deux nombres TRIANGULAIRES consécutifs est toujours un CARRÉ :

Les grecs anciens pratiquaient les mathématiques avec de petits cailloux. D'ailleurs le mot ***« caillou »,*** en latin « ***calculi*** *»,* est à l'origine du mot ***« calcul »*** *;* et les médecins nomment toujours ainsi les petits cailloux que nous pouvons avoir dans notre organisme.



6 + **10** = 6 + 10 = **$16 = 4^2$** .

La somme de deux nombres triangulaires consécutifs est bien le carré de la base du plus grand.

et réciproquement :

Tout carré est la somme de deux nombres triangulaires consécutifs.

4. RELATION entre NOMBRES IMPAIRS et CUBES :

De la même manière que les carrés sont la somme des nombres impairs à partir de 1, nous pouvons remarquer que **tous les cubes peuvent s'écrire comme la somme de quelques nombres impairs consécutifs** :

Sous la forme d'un petit exercice :
1. Choisir un nombre pair et un nombre impair entre 2 et 10,
2. Calculer leurs cubes.
Ex. : 3 et 6. Nous obtenons 27 et 216.

☯. Pour 3, le cube est 3 x 3 x 3 ou 3 x 9 = 9 + 9 + 9
soustraire 2 au premier 9 et ajouter 2 au dernier, nous obtenons :
= **7 + 9 + 11** c'est bien la **somme de nombres impairs consécutifs**.

☯. Pour 6, le cube est 6 x 6 x 6 ou 6 x 36 = 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36
soustraire et ajouter 1 aux deux du milieu *(les 3me et 4me)*,
soustraire et ajouter 3 aux 2me et 5me,
soustraire et ajouter 5 aux 1er et 6me, nous obtenons :
= **31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41** c'est bien la **somme de nombres impairs consécutifs**.

Nous pouvons faire de même pour n'importe quel cube. Pour cela prendre en compte selon

que le nombre est pair ou impair.

En conséquence nous pouvons écrire que :

1 + <u>3 + 5</u> + <u>7 + 9 + 11</u> + <u>13 + 15 + 17 + 19</u> …

= $\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}$ **…**

(et ceci peut-être utilisé pour démontrer le théorème de NICOMAQUE présenté ci-dessous)

De quoi voir la somme des nombres impairs d'un autre œil !

5. <u>SOMME des NOMBRES ENTIERS de 1 à n</u> :

➔ ☯. **Recherche d'une FORMULE qui permet le calcul de la somme des n premiers nombres entiers positifs,** à partir du nombre 1 **:**

<u>Sous la forme d'un petit exercice</u> :

<u>Ex</u>. : somme des nombres de 1 à 10 : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10

Nous pouvons faire l'addition, et nous trouvons 55. Mais si la suite est de 1 à 100, cela devient un peu long. Et si nous voulons la somme des nombres de 1 à 1000, cela devient fastidieux. **Peut-on définir une formule ?**

Si vous ne voyez pas comment faire, vous observerez peut-être que :

dans 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10,

la somme du premier et du dernier : 1 + 10 = 11,

la somme du suivant et l'avant-dernier 2 + 9 = 11,

et … 3 + 8 = 11,

et … 4 + 7 = 11,

et … 5 + 6 = 11,

Cela va certainement vous mettre sur la voie.

En effet, la somme totale sera 11 multiplié par 5 (le nombre de couples : 1+10, 2+9, ...)=55.

<u>En généralisant</u> : la somme des nombres de 1 à n = ***(1+n)*** *x* ***n/2****.*

<u>ex</u>. somme de 1 à 10 : (1 + 10) x 10/2 = 11 x 5 = 55.

Le caractère exceptionnel de **Carl Friedrich GAUSS (1777-1855)** et son talent mathématique est à l'origine de nombreuses légendes. Il est attribué à celui que l'on nommait « **le Prince des mathématiques** » l'anecdote suivante :

On trouve l'origine de ce mythe dans l'éloge funèbre qu'écrivit Wolfgang SARTORIUS (géologue) : ***« Le jeune GAUSS venait juste d'arriver dans cette classe quand BŰTTNER donna en exercice la sommation d'une suite arithmétique. À peine avait-il donné l'énoncé que le jeune GAUSS jeta son ardoise sur la table en disant en bas allemand « Ligget se » (Ça y est !). Tandis que les autres élèves continuaient à compter, multiplier et ajouter, BŰTTNER, avec une dignité affectée, allait et venait, jetant de temps en temps un regard ironique et plein de pitié vers le plus jeune de ses élèves. Le garçon restait sagement assis, son travail terminé, aussi pleinement conscient qu'il devait toujours l'être, une fois une tâche accomplie, que le problème avait été correctement résolu et qu'il ne pouvait y avoir d'autre réponse »***.

➔ ☯. **Quelle est la valeur d'un nombre triangulaire de base n ?**

Ce sera la somme des entiers **1 + 2 + 3 + 4 + …** jusqu'à **n**. Donc en utilisant la formule ci-dessus, nous obtenons : ce **nombre triangulaire** de base **n** = **(1+n)** x **n/2** .

6. SOMME des CARRÉS des NOMBRES ENTIERS de 1^2 à n^2 :

Ce sera la somme des carrés : $\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}$.

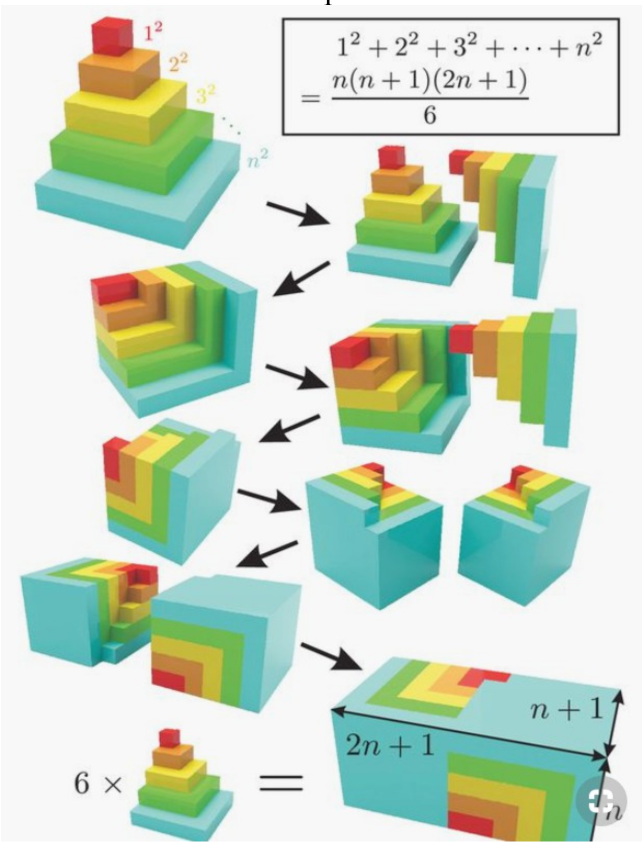
Al-SAMAWAL (1130-1180) est né à Fès au Maroc et meurt à Maragha au nord ouest de l'Iran à 130 km au sud de Tabriz. Mathématicien et médecin de langue arabe, il définit vers 1149 dans son traité *« Livre flamboyant de algèbre »* la formule de calcul de cette somme de carrés ; ***il avait donc environ 19 ans lors de l'écriture de son traité.*** Né d'un famille juive, il se convertit à l'islam à l'âge de 33 ans.

Voilà sa formule :

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n\ (n+1)\ (2n+1)\ /6}.$$

*Ceci correspond au **volume d'un parallélépipède** de dimensions : n, (n+1), (2n+1) et divisé par 6.*

Vous trouverez ci-dessous une <u>démonstration visuelle de cette formule</u> *(fiche technique du genre de montage d'un meuble)*. Cette preuve visuelle est proposée par **Solomon** Wolf **GOLOMB**, né en 1932 à Baltimore et mort en 2016 à Los Angeles. Il est **mathématici**en et informaticien américain à l'origine du graphe de GOLOMB et du codage de GOLOMB utilisé en compression de données.

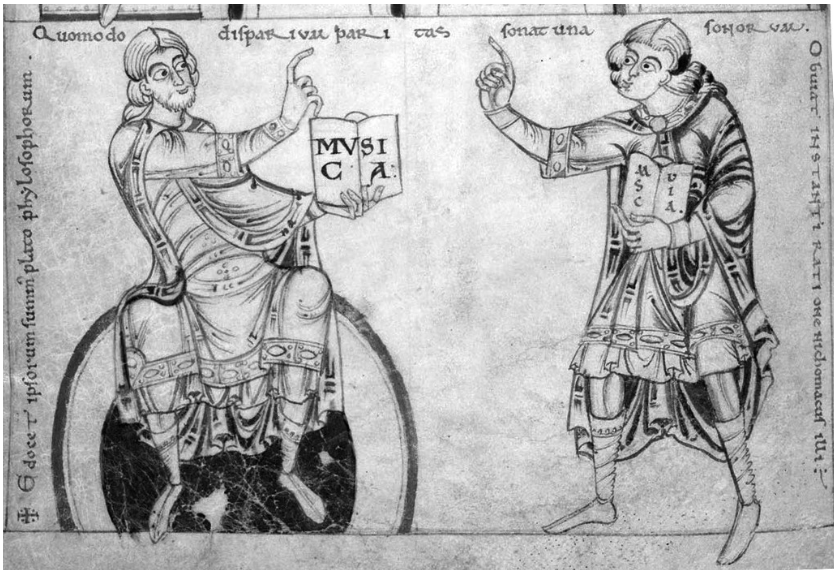


<u>Bibliographie</u> : Cette démonstration visuelle et le propos qui la précède sont extraits du site « Al Samaw'al mathématique », site de Wikipédia.

7. <u>SOMME des CUBES des NOMBRES ENTIERS de 1^3 à n^3</u> :

Cette IDENTITÉ est appelée Théorème de NICOMAQUE de Gérase :

NICOMAQUE vit à Gérase, en actuelle Jordanie, aux environs de 100-150, mort en 142 ou 196 selon les sources. *(information Wikipédia)*.



Platon et Nicomaque de Gérase qualifiés *inventeurs de la musique*
Représentation de XII siècle.

Dans son ouvrage « *Introduction à l'arithmétique* », il étudie les nombres et cherche leurs propriétés : qualités, quantités, formes, tailles, égalités, relations, activités, dispositions, lieux et temps. Ce n'est donc pas une œuvre en arithmétique au sens où on l'entendrait de nos jours, mais une justification de la philosophie pythagoricienne du nombre.

Il définit ainsi les nombres pairs et impairs, les nombres premiers et composés, les nombres parfaits. Il trouve les quatre premiers nombres parfaits : 6, 28, 496, 8128. Il remarque qu'en ajoutant les nombres impairs par paquets (1, 3 + 5, 7 + 9 + 11, 13 + 15 + 17 + 19…) on obtient les cubes successifs des entiers naturels (1^3, 2^3, 3^3, 4^3…).

L'œuvre de NICOMAQUE n'est qu'une observation des propriétés des nombres, mais elle permet de mieux comprendre les philosophies de PYTHAGORE et de PLATON dans le domaine mathématique.

Cette identité/théorème permet de calculer la **<u>SOMME des CUBES des ENTIERS de 1^3 à n^3</u>**

<u>Sous la forme d'un petit exercice</u> :

1. Choisir un nombre **N** entre 2 et 12. *Si vous ne voulez pas faire trop de calculs choisissez un nombre pas trop grand, par exemple à un chiffre*,
2. Faire la somme **S** des nombres entiers de **1** à **N** et élevez le résultat de votre somme au carré,
3. Faire la somme des cubes des nombres entiers de **1** à **N**,
4. Comparer : le carré de la somme de la suite d'entiers et la somme des cubes de la même suite.

<u>Ex</u> : si **N = 4** **S** = 1 + 2 + 3 + 4 = **10**, **S^2 = 100**
Somme des cubes : 1 + 8 + 27 + 64 = **100**

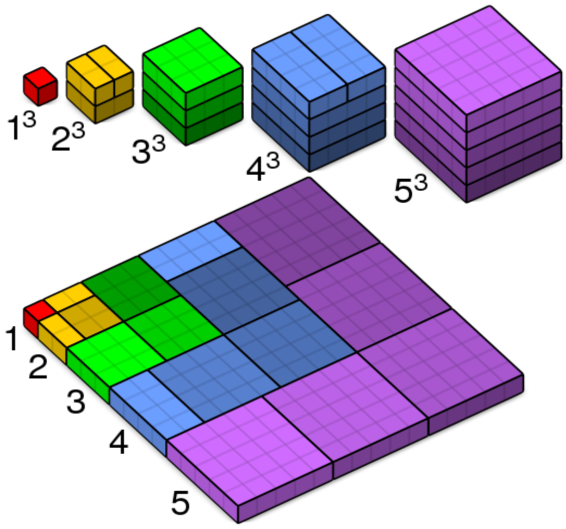
si **N = 8** **S** = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = **36**, **S^2 = 1296**

Somme des cubes : 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512 = **1296**

Nous déduisons que :

La somme des cubes d'une suite d'entiers de 1^3 à N^3 est égale au carré de la somme de la même suite d'entiers de 1 à N.

« De nombreux mathématiciens ont étudié et démontré cette égalité facile à prouver. Chaque personne étudiant la théorie des nombres a dû être émerveillée par ce fait miraculeux. On retrouve cette égalité non seulement dans l'œuvre de Nicomaque *(vivant vers l'an 100 dans l'actuelle Jordanie)*, mais aussi chez Aryabhata en Inde au Vme siècle, chez Al-Karaji vers l'an 1000 en Perse, chez Alcabitius en Arabie, chez le Français Gersonide et chez Nilakantha Somayaji *(vers 1500 en Inde)* ; ce dernier fournissant une démonstration visuelle *(figure ci-dessous)*. »



Bibliographie : Cette démonstration visuelle et le propos qui la précède sont extraits du site « Somme des n premiers cubes », site de Wikipédia.

8. BILAN de ces SOMMES d'ENTIERS, de CARRÉS et de CUBES : en prenant en compte les résultats ci-dessus et la formule de **Al-SAMAWAL** (1130-1180) dans son traité *« Le Brillant en algèbre »* nous pouvons résumer :

☯. **$1 + 2 + 3 + 4 \dots + n = n(n+1)/2$,** *(prouesse du jeune GAUSS, vers 1787)*

☯. **$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$,** *(formule de Al-SAMAWAL, vers 1149)*

☯. **$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 \dots + n)^2$.** *(Théorème de NICOMAQUE, vers 125)*
ou **$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \dots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$.** *(en remplaçant la suite par la formule du haut)*

9. COMPLÉMENT, deux AUTRES EXEMPLES de SUITES :

☯ **9.1 Une SUITE présentée l'an dernier, FIBONACCI :**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F(n)	**0**	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**	**233**	**377**	**610**

➔ **9.1.1. La somme des n premiers termes : Une Addition éclair** :

Additionner les termes de la suite de Fibonacci est un jeu d'enfant. En effet, la somme des termes du premier au énième (**n**) est égale au (**n+2**)^e terme – 1.

Application :

La somme des 10 premiers termes de 1 à 55 est égale à 144 – 1 = 143.

et 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143

➔ **9.1.2. La somme des carrés des n premiers termes, juste une Multiplication** :

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 + \dots + (F_n)^2 = F_n \times F_{n+1}$$

Application 1 :

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 + \dots + (F_6)^2 = F_6 \times F_7$$
$$(1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + \dots + (8)^2 = 8 \times 13$$
$$1 + 1 + 4 + \dots + 64 = 8 \times 13$$
$$104 = 104$$

Application 2 :

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 + \dots + (F_8)^2 = F_8 \times F_9$$
$$(1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + \dots + (21)^2 = 21 \times 34$$
$$1 + 1 + 4 + \dots + 441 = 21 \times 34$$
$$714 = 714$$

☯ **9.2 Des ÉGALITÉS avec des ENTIERS POSITIFS et des ADDITIONS :**

1 + 2 = 3 ,
4 + 5 + 6 = 7 + 8 ,
9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15 , etc …

(pas de limite, et tous les entiers positifs y figurent)

… les nombres se suivent et à chaque ligne, un terme de plus de chaque côté de l'égalité …
Une infinité de lignes et sur la dernière une infinité de nombres … donc, une infinité d'infinités.

Seriez-vous intéressé par chercher la démonstration de ce dispositif ?

Une piste pour cette démonstration : utilisez un certain nombre des choses vues dans l'exposé de ce soir.

Ma prochaine présentation sera :
Le jeudi ***25 janvier*** *2024 de 17 à 19h, dans la même salle de Réunion*
Des PALINDROMES aux NOMBRES de LYCHREL :

- 1. Des noms ***(LAVAL, ANNA)***, des mots ***(été, coloc)***,
des groupes de mots ***(Élu par cette crapule)***, *des phrases* **(*Elle ramassa pas à pas sa marelle*)** et des textes palindromes : *le texte de* ***Georges PEREC*** *de 1969 de* ***5566 lettres*** *et un second* ***plus récent, 2020*** *et plus l****ong, 10 001 lettres,***
- 2. Les nombres palindromes et les autres,
- 3. Comment générer des nombres palindromes à partir des autres,
- 4. Les nombres de Lychrel.