

Présentation à l'UNIVERSITÉ POPULAIRE de CAEN le 12 février 2026

FAMILLES de NOMBRES :

Abondants, Déficients, Parfaits, de MERSENNE, de MERSENNE premiers et EUCLIDE

PLAN :

1. Les NOMBRES ABONDANTS, DÉFICIENTS et PARFAITS,
2. Les NOMBRES PARFAITS, de MERSENNE et de MERSENNE PREMIERS,
3. L'APPORT d'EUCLIDE pour la DÉCOUVERTE des NOMBRES PARFAITS PAIRS,
4. Les NOMBRES AMICAUX (ou AMIABLES),
5. PETITE HISTOIRE de la DÉCOUVERTE des NOMBRES PREMIERS,
6. COMMENT APPRÉHENDER ce TRÈS GRAND NOMBRE ?

1. Les NOMBRES ABONDANTS, DÉFICIENTS et PARFAITS :

POURQUOI VEND-ON les OEUFs par 12 ? (ou les HUITRES, les ESCARGOTS ...)

Intuitivement, cela semble plus facile de se partager 12 œufs en parts égales sans en casser. En effet, et d'un point de vue mathématique il est dit que 12 est un nombre abondant.

Les nombres ABONDANTS, définition : un nombre est abondant si la somme de ses diviseurs, hors lui-même, est plus grande que lui-même.

Rappel : Les diviseurs (ou sous-multiples) d'un nombre entier sont tous les nombres entiers qui permettent une division entière du nombre.

- ex. : 10 est divisible par 1, 2, 5 et 10.
12 est divisible par 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

La Somme des Diviseurs d'un Nombre hors lui-même, que je noterai SDNhlm

- ex. : pour 10 : $SDNhlm(10) = 1 + 2 + 5 = 8$,
pour 12 : $SDNhlm(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$.

☉ 8 est plus petit que 10, donc 10 est un nombre **DÉFICIENT**,

☉ 16 est plus grand que 12, donc 12 est un nombre **ABONDANT**. *C'est pour cela que les œufs ou les huitres se vendent par douzaine ; il y a plus de possibilités de se partager une douzaine d'œufs, sans en casser.*

Les premiers nombres abondants sont (jusqu'à 100) : 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100 ... ; 12 est donc le plus petit d'entre-eux, et cela justifie d'autant cette coutume de la douzaine d'œufs.

☉ Je vous propose maintenant de calculer le SDNhlm de 28 :
pour 28 : $SDNhlm(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

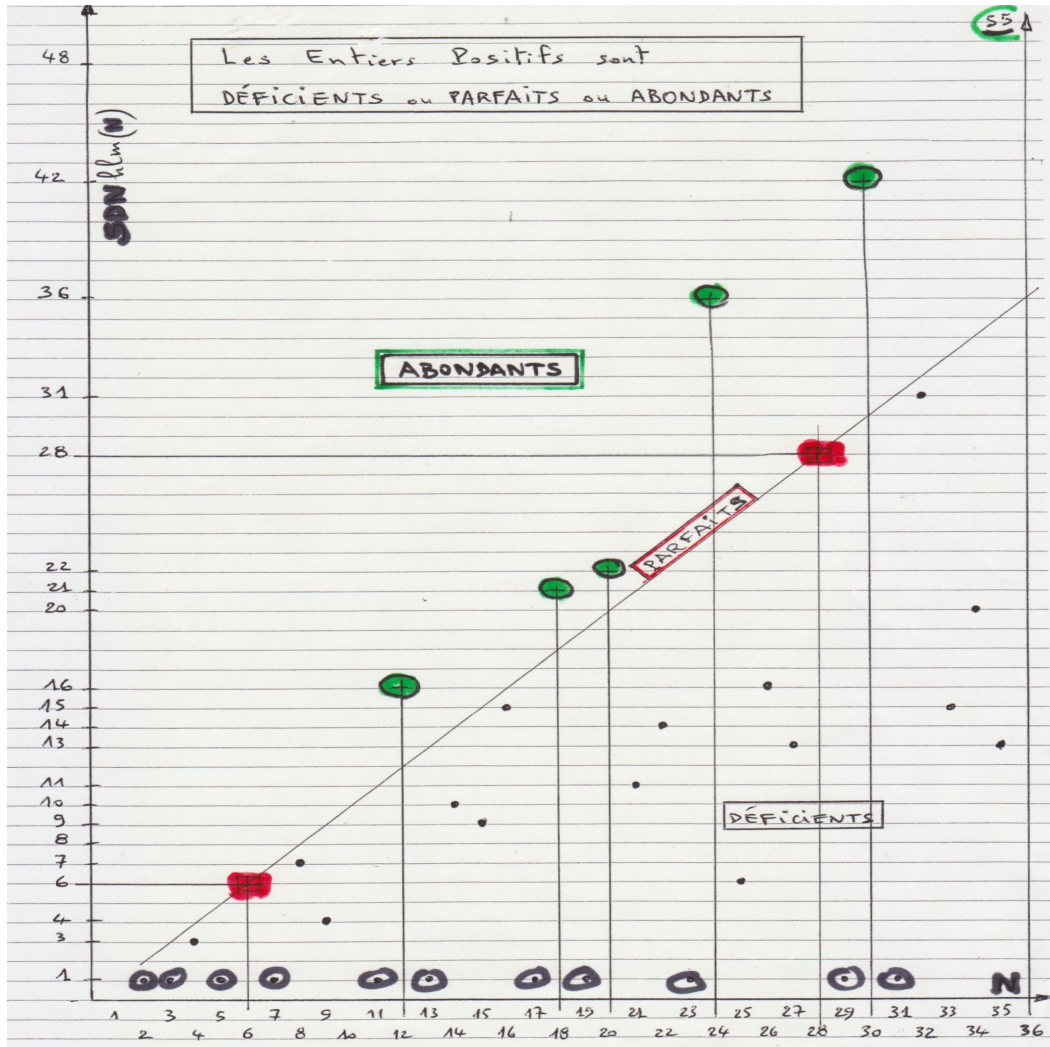
Ce nombre n'est ni DÉFICIENT, ni ABONDANT, il est **PARFAIT**.

Un nombre est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs hors lui-même.
Le plus petit nombre parfait est 6, vous pouvez vérifier : $1 + 2 + 3 = 6$

Les nombres parfaits suivants 28 sont : 496, 8128, 33 550 336, 8 589 869 056 ...

$$SDNhl_m(496) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$$

Nous remarquons que 6, 28 et tous les nombres parfaits connus à ce jour sont aussi des nombres triangulaires ; et les bases de ces nombres triangulaires et parfaits sont des nombres premiers (3 pour 6, 7 pour 28, 31 pour 496, ...) et ... comme les nombres parfaits connus à ce jour sont tous triangulaires, ils sont aussi la somme des entiers de 1 à la base de ce nombre triangulaire.



2. Les NOMBRES PARFAITS, de MERSENNE et de MERSENNE PREMIERS :

2.1. APPROFONDISSEMENT des NOMBRES PARFAITS :

Le plus petit nombre parfait est 6. Les nombres parfaits sont rares. Les suivants sont : 28, 496, 8128, 33 550 336, 8 589 869 056 ... tous les nombres parfaits connus se terminent par 6 ou 28.

De plus, les nombres parfaits connus sont tous des nombres triangulaires, donc ils peuvent s'écrire comme la somme de nombres naturels (entiers positifs) à partir de 1.

A noter que pour chaque nombre parfait le plus grand nombre naturel à additionner est de la forme $(2^n - 1)$ à savoir : 3, 7, 31, 127. Ce qui n'est pas un hasard (nous verrons cela plus bas au point 3.)

Les nombres parfaits pairs sont des nombres triangulaires, et, en tant que tels, ils sont la somme des entiers naturels de 1 jusqu'au nombre de MERSENNE premier, de la forme $(2^n - 1)$.

Ex. : $6 = 1 + 2 + 3$, (somme des diviseurs du nombre hors lui-même)
(somme d'entiers jusqu'à $(2^n - 1)$) = $1 + 2 + 3$;

$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, (somme des diviseurs du nombre hors lui-même)
(somme d'entiers jusqu'à $(2^n - 1)$) = $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$;

$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$, (somme des diviseurs du nombre hors lui-même)
(somme d'entiers jusqu'à $(2^n - 1)$) = $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + 30 + 31$;

$8\ 128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$,
(somme d'entiers jusqu'à $(2^n - 1)$) = $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + 30 + 31 + \dots + 125 + 126 + 127$;

2.2. Une AUTRE CARACTÉRISTIQUE de ces NOMBRES PARFAITS :

Tous les nombres parfaits, excepté 6, sont la somme des cubes des nombres naturels impairs consécutifs à partir de 1.

Ex. : $28 = 1^3 + 3^3$,
 $496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$,
 $8\ 128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + \dots + 15^3$,
 $33\ 550\ 336 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + \dots + 15^3 + 17^3 + \dots + 127^3$,
 $8\ 589\ 869\ 056 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + \dots + 15^3 + 17^3 + \dots + 127^3 + 129^3 + \dots + 511^3$.

...

A noter : ☉ . pour chaque nombre parfait le plus grand impair au cube est de la forme $(2^n - 1)$, à savoir : 3, 7, 15, 127, 511.

☿ . pour chaque nombre parfait, il semblerait que le nombre de cubes additionnés soit toujours pair. Et, comme les nombres sont des impairs, leurs cubes sont donc impairs et si leur nombre est toujours pair les sommes seront toujours paires. Ceci pourrait peut-être participer en partie de la démonstration qu'il n'existe pas de nombre parfait impair (*ceci est pure hypothèse de ma part*)

2.3. Dernières PARTICULARITÉS des NOMBRES PARFAITS :

2.3.1. En dehors de 6, premier nombre parfait, nous pouvons aussi constater que la **racine numérique*** des nombres parfaits moins 1 est toujours 9.

La **racine numérique** d'un nombre est égal à la somme de ses chiffres. Si le résultat comporte plusieurs chiffres, vous refaites la somme des chiffres du résultat jusqu'à obtenir un seul chiffre. C'est ce dernier chiffre que l'on nomme « racine numérique » du nombre. A ne pas confondre avec les racines carrées ou cubiques.

Exemples : **Racine numérique** de $27 = 9$, de $495 = 18 = 9$, de $8127 = 18 = 9$, ...
Donc, le **modulo*** 9 des nombres parfaits sera toujours de 1.

Le **modulo n** d'un nombre est le reste de la division entière de ce nombre par **n**.

2.3.2. La somme des inverses des diviseurs d'un nombre parfait pair est égale à 2.

Exemples :

pour 6 : $1/6 + 1/3 + 1/2 + 1/1 = 2$;
pour 28 : $1/28 + 1/14 + 1/7 + 1/4 + 1/2 + 1/1 = 2$; ...

Bibliographie : Ce chapitre est largement inspiré du site Wikipédia en saisissant « Nombre Parfait ».

Le total des nombres parfaits connus est passé à 52 (*puisque l'on ne connaît que 52 nombres de Mersenne premiers ; le 52e a été découvert en octobre 2024*).

2.4. Les NOMBRES de MERSENNE :

Les nombres dits de MERSENNE sont de la forme $M = 2^n - 1$, avec $n \geq 1$.

Ces nombres sont donc : 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, ... (tous ces nombres s'écrivent en base deux qu'avec le chiffre «1»); ils sont dits « repunits » en binaire. Ex. : $63_{(10)} = 11111_{(2)}$.

2.5. Les NOMBRES de MERSENNE PREMIERS :

Un **nombre de MERSENNE premier** est un nombre qui est à la fois de Mersenne et premier.

Pour que le n -ième nombre de MERSENNE M_n soit premier, il est nécessaire mais non suffisant que son indice n le soit. Par exemple, M_4 n'est pas premier puisque 4 ne l'est pas ($2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5$), et M_{11} n'est pas premier non plus, bien que 11 le soit, car : $M_{11} = 2^{11} - 1 = \underline{2\,047} = 23 \times 89$.

Les plus petits nombres de MERSENNE premiers sont :

- Le 1er : $M_2 = 2^2 - 1 = 3$,
- Le 2me : $M_3 = 2^3 - 1 = 7$, (pas M_4 car $15 = 3 \times 5$)
- Le 3me : $M_5 = 2^5 - 1 = 31$, (pas M_6 car $63 = 7 \times 9$)
- Le 4me : $M_7 = 2^7 - 1 = 127$, (pas M_8 car 255 est multiple de 5, ...)
- Le 5me : $M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191 \dots$

Les nombres de MERSENNE premiers permettent de découvrir des nombres parfaits. Voir ci-dessous.

TABLEAU de DÉTERMINATION des NOMBRES DE MERSENNE PREMIERS

Puissances de 2		Nbs de Mersenne	Nbs de Mersenne PREMIER	
n	$2^{\text{puissance } n}$	$(2^{\text{puissance } n}) - 1$	n premier ? OUI/non	
1	2	1	non	/
2	4	3	OUI	3
3	8	7	OUI	7
4	16	15	non	/
5	32	31	OUI	31
6	64	63	non	/
7	128	127	OUI	127
8	256	255		/
9	512	511		/
10	1024	1023		/
11	2048	2047	OUI	NON car 2 047 = 23 x 89
12	4096	4095		/
13	8192	8191	OUI	Oui 8 191
14	16384	16383		/
15	32768	32767		/
16	65536	65535		/
17	131072	131071	OUI	Oui 131 071
18	262144	262143		
19	524288	524287	OUI	Oui 524 287
20	1048576	1048575		
21	2097152	2097151		
22	4194304	4194303		
23	8388608	8388607	OUI	NON car 8 388 607 = 47 x 178 481
24	16777216	16777215		
25	33554432	33554431		
26	67108864	67108863		
27	134217728	134217727		
28	268435456	268435455		
29	536870912	536870911	OUI	NON car 536 870 911 = 233 x 1 103 x 2 089
30	1073741824	1073741823		
31	2147483648	2147483647	OUI	Oui 2 147 483 647

Marin MERSENNE (1588-1648) est né à Oisey dans la Sarthe, il sera admis interne en 1604 au collège jésuite de La Flèche où il se lia à René DESCARTES ; relation amicale qu'il maintiendra toute sa vie. Après des études de théologie à la Sorbonne il devient prêtre, enseigne la philosophie et revient dans sa cellule de moine de l'ordre des Minimes (*institut religieux d'ermites mendiants et pénitents franciscains*). MERSENNE est un érudit mathématicien et philosophe animé jusqu'au bout de sa vie à servir les objectifs de la science ; fait notoire, il mènera un combat acharné pour défendre GALILÉE dans ses démêlés avec l'église.

MERSENNE est aussi resté célèbre car, à une époque où la presse scientifique n'existait pas encore, il fut le centre d'un réseau d'échange d'informations, prémices de la future Académie des sciences.



Les nombres premiers de MERSENNE, de la forme $2^n - 1$ ont été découverts dès le XVII^e siècle. Mais leur importance n'a explosé que dans les années 1970, quand les spécialistes ont réalisé que leur calcul implique des opérations qui peuvent être implémentées de manière particulièrement efficace par les ordinateurs.

Bibliographie : Les informations concernant Marin MERSENNE sont extraits du livre « **Les nombres premiers** » d'Enrique GRACIAN, édition de l'Institut Henri Poincaré, et du site de Wikipédia.

3. L'APPORT d'EUCLIDE pour la DÉCOUVERTE des NOMBRES PARFAITS PAIRS :

3.1. Un COMPLÉMENT HISTORIQUE :

Le philosophe et mathématicien **NICOMAUQUE de Gérase** (100 ou 200 après J.C.) - Gérase est une ville en Jordanie actuelle - étudie les nombres parfaits en les comparant aux nombres déficients (nombre supérieur à la somme de ses diviseurs propres) et aux nombres abondants (nombre inférieur à la somme de ses diviseurs propres). Il retrouve les quatre premiers nombres parfaits.

Voici comment il les définit dans son ouvrage « Arithmetica » :

« ... il arrive que, de même que le beau et le parfait sont rares et se comptent aisément, tandis que ce qui est laid et mauvais sont prolifères, les nombres excédents et déficients sont en très grand nombre et en grand désordre ; leur découverte manque de toute logique. Au contraire, les nombres parfaits se comptent facilement et se succèdent dans un ordre convenable ; on n'en trouve qu'un seul parmi les unités, 6, un seul dans les dizaines, 28, un troisième assez loin dans les centaines, 496 ; quant au quatrième, dans le domaine des mille, il est voisin de dix mille, c'est 8 128. Ils ont un caractère commun, c'est de se terminer par un 6 ou par un 8, et ils sont tous invariablement pairs. »

Bibliographie : Ces informations concernant NICOMAUQUE de Gérase sont extraites du site internet **KRISTOS Les quatre nombres parfaits**.

3.2. Qu'observons-nous avec les QUATRE PREMIERS NOMBRES PARFAITS :

Je vous propose : - de chercher pour chacun d'eux ses facteurs premiers. Décomposition en produit de facteurs premiers selon le « **théorème fondamental de l'arithmétique** », connu déjà d'EUCLIDE.
- Puis de déduire les diviseurs de chacun d'eux.

6	2	28	2	496	2	8128	2
3	3	14	2	248	2	4064	2
1		7	7	124	2	2032	2
		1		62	2	1016	2
				31	31	508	2
				1		254	2
						127	127
						1	

Remarques :

1. Pour chaque nombre parfait, les facteurs premiers sont uniquement un ou plusieurs « 2 » et un seul nombre de MERSENNE premier.
2. Nous pouvons aussi remarquer que, pour chaque nombre parfait, le nombre de facteurs premier « 2 » + 1 est toujours égal à un nombre premier.

☉ . La décomposition de ces quatre nombres parfaits est bien :

$$\begin{aligned}
 6 &= 2 \times 3 \\
 28 &= 2 \times 2 \times 7 \\
 496 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 31 \\
 8128 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 127
 \end{aligned}$$

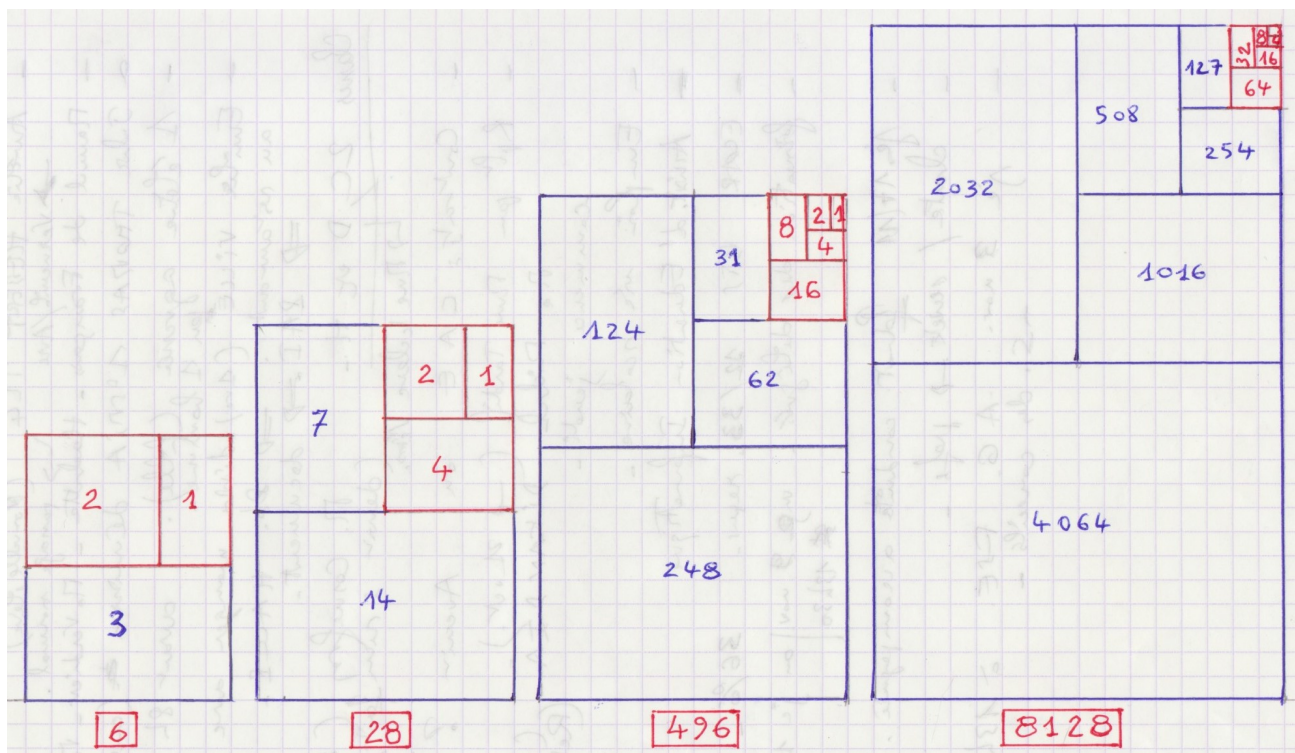
Nous observons que le plus grand facteur premier est toujours le seul facteur premier impair, et que tous les autres sont des « 2 ».

☉ . Nous retrouvons bien les diviseurs de chacun de ces nombres :

$$\begin{aligned}
 6 &\text{ est divisible par : } 1, 2 \text{ et } 3 \\
 28 &\text{ est divisible par : } 1, 2, 4, 7 \text{ et } 14 \\
 496 &\text{ est divisible par : } 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 \text{ et } 248 \\
 8128 &\text{ est divisible par : } 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032 \text{ et } 4064
 \end{aligned}$$

Nous observons aussi que le plus grand diviseur est toujours la demi-valeur du nombre parfait. Nous pouvons aussi, pour chacun de ces nombres, comparer les sommes de leurs diviseurs, à voir ci-dessous :

☉ . Comparaison de ces nombres par les sommes de leurs diviseurs stricts (*hors lui-même*) :



Les nombres parfaits et leurs diviseurs sont ainsi représentés par des rectangles, et les surfaces de ces rectangles sont approximativement proportionnelles à la valeur de chaque nombre. Ces schémas permettent d'observer que pour chaque nombre parfait les diviseurs sont répartis dans deux suites :

- * Une suite des **puissances de deux** (*carrés rouges*) ,
- * Une suite des **multiples d'un nombre de MERSENNE premier** (*carrés bleus*) .

Remarques :

1. Le nombre des termes de chacune des deux suites augmentent en même temps que la valeur des nombres parfaits. Pour chaque nombre parfait, la suite des puissances de deux comporte un terme de plus que la suite des multiples du nombre de MERSENNE premier.
2. Malgré son nombre de termes plus grand, la suite des puissances de deux représente, pour chaque nombre parfait, une somme qui devient relativement plus petite à mesure que le nombre parfait augmente.
3. Enfin, nous préciserons que le diviseur « 1 » est bien un terme de la suite des puissances de deux, puisque $1 = 2^0$.

3.3. Proposition de DÉMONSTRATION de la FORMULE des Nombres Parfaits d'EUCLIDE :

Soit **n** le nombre de termes de la suite de puissances de deux.

Le nombre de MERSENNE premier sera exprimé sous la forme de **Mp** = $(2^n - 1)$.

Soit **NP** le Nombre Parfait,

SP2 la Somme des termes de la suite des Puissances de « 2 » et

SMMp la Somme des termes de la suite des Multiples du nombre de MERSENNE premier,

Et : **NP** = SP2 + SMMp.

Somme des termes de la suite des puissances de deux :

$$SP2 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{(n-1)} = (2^n - 1)$$

Somme des termes de la suite des multiples du nombre de MERSENNE premier :

$$SMMp = Mp + 2 Mp + 2^2 Mp + \dots + 2^{(n-2)} Mp = Mp (2^{(n-1)} - 1) = (2^n - 1) (2^{(n-1)} - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : NP} &= \text{SP2} + \text{SMMp} = (2^n - 1) + (2^n - 1)(2^{(n-1)} - 1) \\ \text{NP} &= (2^n - 1)[1 + (2^{(n-1)} - 1)] \\ \text{NP} &= (2^n - 1)2^{(n-1)} \quad \text{CQFD (voir la formule d'EUCLIDE ci-dessous)} \end{aligned}$$

3.4. Formule d'EUCLIDE : (dans son livre IX des *Éléments*) :

Soit $N = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$. Et si $(2^n - 1) = p$ est un nombre **premier**, alors **N est un nombre parfait**.

Exemples :

n	p	? premier	N	? Parfait
1	1	Non	±	Non
2	3	<u>Oui</u>	6	Oui
3	7	<u>Oui</u>	28	Oui
4	15	Non	120	Non
5	31	<u>Oui</u>	496	Oui
6	63	Non	2016	Non
7	127	<u>Oui</u>	8128	Oui

Pour illustrer cette formule voir le *Tableau formule d'Euclide ci-dessous :*

RECHERCHE de NOMBRES PARFAITS N avec la formule d'EUCLIDE
--

n	(2 puiss. n) -1	premier ?	2 puiss. (n-1)	Nombre parfait N
1	1	Non	X	X
2	3	Oui	2	6
3	7	Oui	4	28
4	15	Non	X	X
5	31	Oui	16	496
6	63	Non	X	X
7	127	Oui	64	8128
8	255	Non	X	X
9	511	Non	X	X
10	1023	Non	X	X
11	2047	Non	X	X
12	4095	Non	X	X
13	8191	Oui	4096	33550336
14	16383	Non	X	X
15	32767	Non	X	X
16	65535	Non	X	X
17	131071	Oui	65536	8589869056
18	262143	Non	X	X
19	524287	Oui	262144	137438691328

Dès le III^{me} siècle av. J.C., EUCLIDE énonçait et démontrait ceci. Et deux millénaires plus tard, EULER prouvait que tous les nombres parfaits *pairs* ont cette forme. Aucun nombre parfait impair n'est connu à ce jour. Et, pour le moment, **aucune démonstration nous dit avec certitude s'il y en a ou pas.**

Les sept premiers nombres parfaits pairs sont calculés dans le tableau suivant :

p	Nb. Mersenne premier	Nombre PARFAIT
2	3	6
3	7	28
5	31	496
7	127	8 128
13	8 191	33 550 336
17	131 071	8 589 869 056
19	524 287	137 438 691 328

Bibliographie : Ces informations du point 3.4. concernant la formule d'Euclide sont extraites du site

<http://villemmin.gerard.free.fr>.

Ci-dessous, les quatre premiers nombres parfaits, connus depuis l'Antiquité :

$$6 = 2^1(2^2 - 1) = (1 + 2) + 3, \quad (\text{de ce côté de l'égalité somme des diviseurs})$$

$$28 = 2^2(2^3 - 1) = (1 + 2 + 4) + (7 + 14),$$

$$496 = 2^4(2^5 - 1) = (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + (31 + 62 + 124 + 248),$$

$$8128 = 2^6(2^7 - 1) = (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) + (127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064).$$

Bibliographie : Ces informations sont extraites d'un site Wikipédia en saisissant « **Recherche des nombres parfaits** ».

3.5. DÉMONSTRATION que chaque NOMBRE PARFAIT est égal à la SOMME des ENTIERS de 1 au NOMBRE de MERSENNE PREMIER ($2^n - 1$) lui correspondant :

Si on considère que la somme des entiers de 1 à p est égal à $(1+p)p/2$,

alors la somme des entiers de 1 à $(2^n - 1)$ est égal à :

$$= [1 + (2^n - 1)] (2^n - 1)/2$$

$$= [2^n] / 2 \times (2^n - 1) \quad \text{CQFD car :}$$

$$= 2^{n-1} \times (2^n - 1), \quad \text{cette formule est bien celle d'EUCLIDE des nombres parfaits pairs.}$$

4. Les NOMBRES AMICAUX (ou AMIABLES) :

Nous avons découvert les nombres entiers **déficients** (par exemple tous les nombres premiers), les **abondants** (12 est le plus petit) et les **parfaits** (ni déficients, ni abondants : 6, 28 ...). Pour cela nous recherchons la Somme des Diviseurs du Nombre, hors lui-même (SDN_{hlm}). Tous les nombres entiers sont soit déficients, abondants ou parfaits. Les déficients semblent les plus nombreux et les moins nombreux les nombres parfaits. L'ensemble de tous ces nombres déficients, parfaits et abondants représente l'ensemble des nombres entiers positifs. Mais nous pouvons trouver des nombres qui se « répondent » entre « déficients » et « abondants ». Voir la suite :

Soit deux entiers 220, 284. Calculez le SDN_{hlm} pour chacun d'eux.

Que trouvez-vous ?

Les diviseurs de 220 (hlm) $\rightarrow 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$,

Les diviseurs de 284 (hlm) $\rightarrow 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$,

nous déduisons que **ces deux nombres sont amicaux.**

Ce sont les deux nombres amicaux les plus petits, connus depuis PYTHAGORE.

Les nombres amicaux suivants sont **1184** et **1210**. A vérifier :

$$1184 : 1+2+4+8+16+32+37+74+148+296+592 = 1210$$

$$1210 : 1+2+5+10+11+22+55+110+121+242+605 = 1184$$

Bibliographie : Le contenu de ce point est extrait d'un excellent roman dont je vous conseille la lecture : « **La formule préférée du professeur** » de **Yoko OGAWA** chez Acte Sud 2005 (livre disponible dans les bibliothèques de Tocqueville et de Venois à Caen, d'Hérouville et d'Ifs). C'est suite à la lecture de ce livre que j'ai décidé d'initier mes ateliers « La Beauté des Nombres ».

René DESCARTES (1596-1650), Pierre de FERMAT (?1601-1665) et Leonhard EULER (1707-1783) se sont intéressés aux nombres amiables. EULER, à lui seul, en découvrit plus de 60 paires.

Et, c'est un amateur italien de 16 ans, Nicolo PAGANINI (1850-?) (*pas le musicien, né bien avant*) qui découvrit en 1866 celle-ci, paire ignorée jusque-là : **(1184, 1210)** :

$$1184 = 2^5 \times 37,$$

et

$$1210 = 2 \times 5 \times 11^2.$$

Cela fait douze diviseurs pour chacun de ces deux nombres, ce n'est pas trop.

Pas comme pour l'une des paires découverte par EULER :

$$3^5 \times 7^2 \times 13 \times 19 \times 53 \times 6959, \quad (\text{sauf erreur} = 1\,084\,730\,902\,983)$$

et

$$3^5 \times 7^2 \times 13 \times 19 \times 179 \times 2087, \quad (\text{sauf erreur} = 1\,098\,689\,026\,617)$$

où ces deux nombres, supérieurs à mille milliards, ont 288 diviseurs chacun ; tous calculs faits à la main. Qu'un « géant des mathématiques » comme Leonhard EULER ait passé du temps, combien ?, pour trouver plus de 60 paires d'amiables en dit long sur les frontières fragiles que la passion des nombres bouscule sans cesse entre mathématiques savantes et récréatives.

Passion bien connue chez EULER, qui était un extraordinaire calculateur, et dont il fut dit que « **c'est en cessant de vivre qu'il cessa de calculer** ».

Aujourd'hui, la recherche des nombres amicaux entretient l'insatiable appétit des ordinateurs.

En 2012, on connaissait environ 12 000 000 de nombres amicaux, dont des nombres de 24.073 chiffres ! (*bien plus grands que ceux ci-dessus de Leonhard EULER de 13 chiffres*).

Bibliographie : Ce contenu est extrait page 156 du livre : « **Nombres à compter et à raconter** » de **Stella BARUK au Seuil**, je crois 2014 (livre disponible dans la bibliothèque du Quai des Mondes à Mondeville) et compléments sur internet site Wikipédia.

5. PETITE HISTOIRE de la DÉCOUVERTE des NOMBRES de MERSENNE PREMIERS :

5.1. DEUX MILLE ans de QUÊTE MATHÉMATIQUE :

Les premiers nombres premiers ont été découverts de manière empirique en éliminant progressivement les autres nombres grâce à des algorithmes implémentés entièrement à la main. ÉRATOSTHÈNE, que vous connaissez peut-être pour sa méthode qui permet d'estimer le diamètre de la Terre, a par exemple créé le Crible d'ÉRATOSTHÈNE, un algorithme remarquablement efficace pour y parvenir 200 ans avant notre ère.

Mais à cause de la raréfaction des plus grands nombres premiers, cet exercice est devenu de plus en plus difficile. La chasse aux nombres premiers est donc devenue l'apanage de grands théoriciens comme EULER et GAUSS - encore eux - , qui ont développé des méthodes plus sophistiquées. Mais même ces génies ont fini par se heurter à un mur ; ils sont arrivés à un stade où il serait pratiquement impossible de trouver d'autres nombres premiers à la main.

Pour aller plus loin, il a fallu attendre l'arrivée d'un outil révolutionnaire : l'ordinateur. La montée en puissance de l'informatique correspond en effet à une énorme accélération du processus. Par exemple, au début du 20e siècle, le calcul des nombres premiers se limitait à quelques millions ; dans les années 1960, les ordinateurs avaient déjà repoussé cette limite à plus d'un milliard, et ce chiffre n'a fait qu'augmenter jusqu'à aujourd'hui.

5.2. Les DÉCOUVERTES de ces NOMBRES PREMIERS au FIL du TEMPS :

Les nombres premiers de MERSENNE sont liés aux nombres parfaits, qui sont les nombres égaux à la somme de leurs diviseurs propres. Ces derniers sont déjà étudiés par EUCLIDE au 4^e siècle av. J.-C. puis par le suisse Leonhard EULER au 18^e.

Si MERSENNE n'a pas été le premier à étudier les nombres qui portent son nom, il a fourni une liste de nombres premiers de MERSENNE jusqu'à l'exposant 257. Une liste cependant fautive : elle comporte par erreur 67 et 257, et les nombres 61, 89 et 107 sont oubliés.

- Les quatre premiers nombres premiers de MERSENNE étaient connus dès l'Antiquité.
- Le cinquième $2^{13}-1$ a été découvert avant 1461 par un inconnu. Selon une autre source par le mathématicien de Haute Mésopotamie Ibn FALLUS (1194-1240 ou 1252 *selon les sources*)
- Les deux suivants ont été trouvés en 1588 par le mathématicien italien Pietro CATALDI (1548-1626).
- En 1750, Leonhard EULER (1707-1783), mathématicien suisse, en trouve un autre.
- Le suivant a été trouvé en 1876 par Édouard LUCAS (1842-1891), mathématicien français, puis un en 1883 par Ivan PERVUSHIN (1827-1900), ecclésiastique et mathématicien russe.
- Deux autres ont été trouvés par Ralph Ernest POWERS (1875-1952), mathématicien américain, en 1911 et en 1914.

La notation usuelle et quelques remarques :

☉ M_1 est le 1er nombre premier de MERSENNE. On note $M_1 = M_2 = 2^2 - 1 = 3$.

Ces notations sont usuelles mais piégeuses, notez bien la différence d'indices $M_1 \neq M_1$.



☉ La **plaque d'immatriculation** de **Landon NOLL**, informaticien californien qui a découvert en 1979 le 26e nombre premier de MERSENNE, M_{23209} . Ce nombre de MERSENNE était aussi un nombre premier record, il possède 6 987 chiffres.

☉ **Les huit plus petits exemples de nombres de MERSENNE premiers sont :**

$$M_2 = 2^2 - 1 = 3, \quad M_3 = 2^3 - 1 = 7, \quad M_5 = 2^5 - 1 = 31, \quad M_7 = 2^7 - 1 = 127,$$

$$M_{13} = 2^{13} - 1 = 8\ 191, \quad M_{17} = 2^{17} - 1 = 131\ 071, \quad M_{19} = 2^{19} - 1 = 524\ 287,$$

$M_{31} = 2^{31} - 1 = 2\ 147\ 483\ 647$ sont premiers, et les puissances, p de 2 : **2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31** sont bien des nombres premiers.

La réciproque est fautive. En effet :

Même si n est premier, le n -ième nombre de MERSENNE ($M_n = 2^n - 1$) peut ne pas être premier. Donc :

☉ **Les trois plus petits contre-exemples sont :**

Les nombres 11, 23, 29 sont premiers, mais :

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = \underline{2\ 047} = 23 \times 89,$$

$$M_{23} = 2^{23} - 1 = \underline{8\ 388\ 607} = 47 \times 178\ 481,$$

$$M_{29} = 2^{29} - 1 = \underline{536\ 870\ 911} = 233 \times 1\ 103 \times 2\ 089 ; \text{ donc ces trois nombres sont composés.}$$

Le site **Mersenne.org** regroupe les données actuellement connues sur ces nombres :

Mn	p	Valeur de Mp	Nombre de chiffres	Date de	Découvreur
M1	M2	3	1	Antiquité	Les grecs
M2	M3	7	1	Antiquité	Les grecs
M3	M5	31	2	Antiquité	Les grecs
M4	M7	127	3	Antiquité	Les grecs
M5	M13	8 191	4	13 ème	Ibn Fallus (1194-1239)
M6	M17	131 071	6	1588	Cataldi
M7	M19	524 287	6	1588	Cataldi
M8	M31	2 147 483 647	10	1750	Euler
M9	M61	2 305 843 009 213 693 951	19	1883	Pervushin
M10	M89	618970019...449562111	27	1911	Powers (en)
M11	M107	162259276...010288127	33	1914	Powers
M12	M127	170141183...884105727	39	1876	Lucas
M13	M521	686479766...115057151	157	30-janv-52	Robinson (en) (SWAC (en))
M14	M607	531137992...031728127	183	30-janv-52	Robinson (SWAC)
M15	M1279	104079321...168729087	386	25-juin-52	Robinson (SWAC)
M16	M2203	147597991...697771007	664	07-oct-52	Robinson (SWAC)
M17	M2281	446087557...132836351	687	09-oct-52	Robinson (SWAC)
M18	M3217	259117086...909315071	969	08-sept-57	Riesel (en) (BESK (en))
M19	M4253	190797007...350484991	1 281	03-nov-61	Hurwitz (IBM)
M20	M4423	285542542...608580607	1 332	03-nov-61	Hurwitz (IBM)
M21	M9689	478220278...225754111	2 917	11-mai-63	Gillies (en) (ILLIAC II)
M22	M9941	346088282...789463551	2 993	16-mai-63	Gillies (ILLIAC II)
M23	M11213	281411201...696392191	3 376	02-juin-63	Gillies (ILLIAC II)
M24	M19937	431542479...968041471	6 002	04-mars-71	Tuckerman (en) (IBM)
M25	M21701	448679166...511882751	6 533	30-oct-78	Noll (en) et Nickel (CDC)
M26	M23209	402874115...779264511	6 987	09-févr-79	Noll (CDC)
M27	M44497	854509824...011228671	13 395	08-avr-79	Nelson (en) & Slowinski (en) (Cray Research)
M28	M86243	536927995...433438207	25 962	25-sept-82	Slowinski (Cray)
M29	M110503	521928313...465515007	33 265	28-janv-88	Colquitt & Welsh (NEC)

Mn	p	Valeur de Mp	Nombre de chiffres	Date de	Découvreur
M30	M132049	512740276...730061311	39 751	19-sept-83	Slowinski (Cray)
M31	M216091	746093103...815528447	65 050	1er septembre 1985	Slowinski (Cray)
M32	M756 839	174135906...544677887	227 832	19-févr-92	Slowinski & Gage
M33	M859 433	129498125...500142591	258 716	10-janv-94	Slowinski & Gage
M34	M1 257 787	412245773...089366527	378 632	03-sept-96	Slowinski & Gage
M35	M1 398 269	814717564...451315711	420 921	13-nov-96	GIMPS / Joël Armengaud

Le « **GREAT INTERNET MERSENNE PRIME SEARCH** », ou **GIMPS**, est un projet de calcul partagé où les volontaires utilisent un logiciel client pour chercher les nombres premiers de MERSENNE. Le projet a été fondé par George WOLTMAN, qui est aussi le créateur du logiciel de calcul distribué employé.

L'algorithme utilisé est le **test de primalité de LUCAS-LEHMER** pour les nombres de MERSENNE.

Ce projet a permis de trouver les plus grands nombres premiers de MERSENNE connus qui sont aussi les plus grands nombres premiers connus.

NOMBRES de MERSENNE PREMIERS découverts par GIMPS :

M35 13/11/1996 **Joël Armengaud** a découvert le 35ème nombre de Mersenne premier, $2^{1\,398\,269}-1$
M36 24/08/1997 **Gordon Spence** a découvert le 36ème nombre de Mersenne premier, $2^{2\,976\,221}-1$
M37 27/01/1998 **Roland Clarkson** a découvert le 37ème nombre de Mersenne premier, $2^{3\,021\,377}-1$
M38 01/06/1999 **Nayan Hajratwala** a découvert le 38ème nombre de Mersenne premier, $2^{6\,972\,593}-1$
M39 14/11/2001 **Michael Cameron** a découvert le 39ème nombre de Mersenne premier, $2^{13\,466\,917}-1$
M40 17/11/2003 **Michael Shafer** a découvert le 40ème nombre de Mersenne premier, $2^{20\,996\,011}-1$
M41 15/05/2004 **Josh Findley** a découvert le 41ème nombre de Mersenne premier, $2^{24\,036\,583}-1$
M42 18/02/2005 **Dr. Martin Nowak** a découvert le 42ème nombre de Mersenne premier, $2^{25\,964\,951}-1$
M43 15/12/2005 **Curtis Cooper et Stev. Boone**, le 43ème nombre de Mersenne premier, $2^{30\,402\,457}-1$
M44 04/09/2006 **Curtis Cooper et Stev. Boone**, le 44ème nombre de Mersenne premier, $2^{32\,582\,657}-1$
M45 06/09/2008 **Hans-Michael Elvenich**, le 45ème nombre de Mersenne premier, $2^{37\,156\,667}-1$
M46 04/06/2009 **Odd Magnar Strindmo**, le 46ème nombre de Mersenne premier, $2^{42\,643\,801}-1$
M47 04/06/2008 **Edson Smith** a découvert le 47ème nombre de Mersenne premier, $2^{43\,112\,609}-1$
M48 04/06/2013 **Curtis Cooper** a découvert le 48ème nombre de Mersenne premier, $2^{57\,885\,161}-1$
M49 04/06/2016 **Curtis Cooper** a découvert le 49ème nombre de Mersenne premier, $2^{74\,207\,281}-1$
M50 04/06/2017 **Jonathan Pace** a découvert le 50ème nombre de Mersenne premier, $2^{77\,232\,917}-1$
M51 04/06/2018 **Patrick Laroche** a découvert le 51ème nombre de Mersenne premier, $2^{82\,589\,933}-1$
M52, le plus grand connu depuis le 24 octobre 2024, et découvert par **Luke DURANT**, est $2^{136\,279\,841}-1$, un nombre de 41 024 320 chiffres.

Nota :

Le 10^e nombre de MERSENNE non premier mais d'indice premier :

$M_{67} = 147\,573\,952\,589\,676\,412\,927$, figurait dans la liste originelle de MERSENNE ; mais

LUCAS montra en 1876 que ce nombre n'est pas premier, sans toutefois pouvoir exhiber ses facteurs.

La factorisation $M_{67} = 193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287$ fut déterminée par Frank Nelson COLE en

1903.

5.3. Le DÉBUT d'une NOUVELLE ÈRE :

La majorité des nouveaux nombres premiers découverts depuis ce grand tournant sont donc des nombres de MERSENNE. Aujourd'hui, il existe des initiatives qui sont entièrement dédiées à leur traque. On peut notamment citer **GIMPS** (*Great Internet Mersenne Prime Search*). Il s'agit d'un projet collaboratif à travers lequel n'importe qui peut apporter sa pierre à l'édifice; il suffit de mettre sa machine personnelle au service de ces calculs en téléchargeant un logiciel « open source » appelé Prime 95. Ce projet mobilise des milliers d'unités de traitement graphique (GPU) à travers vingt-quatre centres de données dans dix-sept pays. Les chercheurs utilisent un algorithme spécifique pour passer au crible des milliards de possibilités.

En 2018, cette approche a permis de découvrir ce qui était alors le plus grand nombre premier connu, **M51**, sans utiliser le moindre supercalculateur.

Luke DURANT, ancien employé d'Nvidia est devenu un contributeur majeur de GIMP. Conscient du potentiel de calcul des GPU à cause de son parcours professionnel, il a introduit une nouvelle approche basée sur ces composants qui lui a permis d'identifier **le 52e nb. premier de MERSENNE, noté $2^{136\,279\,841} - 1$** . Le 51e est $2^{82\,589\,933} - 1$.

La validation de ce monstre **M52 à 41 millions de chiffres** (*exactement 41 024 320*), soit 16 millions de plus que le précédent, et de quoi remplir environ **11 000 pages A4 en police 12 !**, marque donc un changement de paradigme. D'après la fondation GIMPS, elle « *met fin au règne de 28 ans des ordinateurs personnels ordinaires dans la recherche de ces énormes nombres premiers* » et lance une nouvelle ère placée sous la bannière de l'informatique haute performance.

En prenant un peu de recul, on peut s'interroger par rapport à l'intérêt de ces efforts ; **cela vaut-il vraiment la peine de calculer des nombres premiers toujours plus énormes ?** Au risque d'en frustrer certains, la réponse n'est pas totalement tranchée. Force est de constater qu'à l'heure actuelle, il y a « *peu d'utilisations pratiques pour ces grands nombres premiers* », comme l'explique le communiqué de GIMPS.

Mais ce même billet souligne aussi le fait que « *ces mêmes doutes existaient il y a quelques décennies, jusqu'à ce que d'importants algorithmes de cryptographie soient développés sur la base des nombres premiers* ». Il est donc tout à fait possible qu'un jour, de nouvelles innovations fassent appel à ces nombres gargantuesques.

Pour sa découverte, **Luke DURANT** a reçu un **prix en espèces de 3 000 \$** de la part de GIMPS. Néanmoins, les récompenses ne s'arrêtent pas là : des primes supplémentaires de 150 000 \$ et 250 000 \$ sont offertes à ceux qui découvriront respectivement le premier nombre premier à cent millions de chiffres et le premier à un milliard de chiffres. Ces incitations montrent que la recherche en mathématiques peut avoir des retombées significatives et motivantes, et ce, même à un niveau amateur.

NOMBRE PREMIER M52 affectueusement surnommé M136 279 841

Avec plus de 41 millions de chiffres (*exactement 41 024 320*), ce nombre premier surnommé **M136 279 841** élève l'ancien record de 64% (*un supplément de 16 millions de chiffres*).

La famille des nombres premiers vient de s'agrandir grâce à la contribution d'un chercheur amateur : dites bonjour à **$2^{136\,279\,841} - 1$** , un monstre qui s'étend sur 41 millions de chiffres !

Les nombres premiers sont des nombres entiers qui n'admettent que deux diviseurs : 1 et eux-mêmes ; et cette particularité en fait des objets mathématiques importants. En pratique, on peut les considérer comme les constituants fondamentaux de tous les entiers naturels, d'où leur nom.

Les nombres premiers fascinent les mathématiciens depuis des millénaires. L'illustre **EUCLIDE** a réussi à prouver il y a 2300 ans déjà qu'il existe une infinité de nombres premiers. Plus récemment, ce sont d'autres titans de la science comme **EULER** qui ont repris le flambeau, alimentant un champ de recherche dont la complexité a augmenté à une vitesse vertigineuse au fil des siècles. Et, il ne s'agit pas que d'une expression abstraite. **GAUSS**, un autre monstre sacré de la discipline, a notamment prouvé au 19e siècle que **les nombres premiers deviennent de moins en moins fréquents à mesure que les nombres augmentent** ; plus on avance dans la numération, plus ils deviennent rares.

Les nombres premiers jouent un rôle crucial dans plusieurs branches de la science moderne. On peut citer les mathématiques fondamentales, à travers ce qu'on appelle la théorie des nombres, mais aussi des disciplines plus concrètes, de l'**informatique** à la **cryptographie** (voir la méthode RSA).

Bibliographie : Tout ce chapitre « **NOMBRE PREMIER surnommé M136 279 841** » est largement inspiré d'internet, depuis le lien : <https://www.journaldugeek.com/2024/10/24/le-plus-grand-nombre-premier-connu-identifie-par-un-mathematicien-amateur/> et de sites, en particulier « Nombre de MERSENNE premier - Wikipédia » et « Les Nombres de MERSENNE – math93.com ».

6. COMMENT APPRÉHENDER ce TRÈS GRAND NOMBRE ? :

6.1. Une PETITE HISTOIRE :

Le **problème des grains de riz et de l'échiquier**, dénommée aussi « *Légende de SISSA* », est un problème mathématique pouvant s'exprimer ainsi :

« On place un grain de riz sur la première case d'un échiquier. Si on fait en sorte de doubler à chaque case le nombre de grains de la case précédente (*un grain sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, etc.*), combien de grains de riz obtient-on au total ? »

Le problème peut être résolu par une addition où chaque valeur est le double de la précédente. Puisqu'un échiquier possède 64 cases, le total des grains est de $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 \dots$

... jusqu'à 9 223 372 036 854 775 808 grains ou 2^{63} sur la 64^e case. On obtient ainsi un total de $2^{64}-1$ ou 18 446 744 073 709 551 615 grains, ce qui correspond au 64^e nombre de MERSENNE.

Ce grand nombre se prononce : 18 milliards 446 millions 744 milles 73 millions de milliards 709 millions 551 milles 615 grains.

Ce problème est lié à la légende de la création du jeu d'échecs. : la **légende de Sissa** est un mythe qui raconte l'invention du « Chaturanga », la forme indienne du jeu d'échecs.

Nota : Si l'on se base sur la production annuelle mondiale et actuelle de riz (776 millions de tonnes en 2022), il faudrait environ 950 ans pour réunir tous les grains de riz nécessaires à la réalisation de ce problème (738 milliards de tonnes à raison de 0,04 g par grain de riz). Mais si l'on considère le temps de conservation du riz qui est d'un peu plus de 30 ans, il serait en réalité impossible de fournir le riz nécessaire à ce problème.

Bibliographie : Cette petite histoire est extraite du site « Wikipédia » en saisissant sur internet « *Légende de SISSA* ».

6.2. Pour IMAGINER un ORDRE de GRANDEUR :

Nous venons de comprendre que, $2^{64}-1$, le nombre total de grains de riz sur l'échiquier était déjà très très grand : **$2^{64}-1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$ grains, c'est approximativement la production actuelle mondiale de riz durant 950 années et sur la base du rendement de 2022.**

Donc, pouvez-vous imaginer la grandeur de ce **nombre premier** découvert en octobre 2024, le plus grand jamais connu des hommes :

$2^{136\ 279\ 841} - 1$. Inutile d'essayer de l'écrire ici, puisque ce nombre est composé de plus de 41 millions de chiffres ; soit quelques **11 000 pages A4 en police 12 !** (la police 12 est celle de ce texte).

Et donc, le plus grand **NOMBRE PARFAIT**, construit avec **M52**, le **plus grand nombre premier**, est :

$$2^{136\ 279\ 840} \times (2^{136\ 279\ 841} - 1) .$$

La grandeur de ces nombres n'est plus à taille humaine, et il nous est très difficile de nous en faire une bonne représentation.